ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1979

MATHEMATIQUES I - T.A. - (remplacement)

(2 pages dactylographiées)

On considère les quatre applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: f_1 , f_2, f_3, f_4 définies par :

$f_1 : x \longmapsto \cos x$; $f_2 : x \longmapsto \sin x$; $f_3 : x \longmapsto \cos 2x$; $f_4 : x \longmapsto \sin 2x$

1) On désigne par E l'espace vectoriel réel engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_i)_{i \in \{1,2,3,4\}}$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E. Quelle est la dimension de E ?

2) Soit α un nombre réel donné. A toute fonction f de E on associe l'application $\mathcal{L}_\alpha(f)$:

$$\mathcal{L}_\alpha(f) \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x+\alpha) \end{cases}$$

et l'on note $\mathcal{L}_\alpha$ l'application : $f \longmapsto \mathcal{L}_\alpha(f)$ de E dans E.

a- Montrer que $\mathcal{L}_\alpha$ est un endomorphisme de E.

b- Montrer que $\mathcal{L}_\alpha$ est un automorphisme de E et identifier $\mathcal{L}_\alpha^{-1}$.

c- Déterminer la matrice L_α associée à $\mathcal{L}_\alpha$ lorsque E est rapporté à la base $\mathcal{B}$.

Calculer L_α^{-1}.

Etudier le produit $L_\alpha . L_\beta$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Calculer $\det(L_\alpha)$.

3) A toute fonction f de E, on associe sa dérivée f'. On note $\mathcal{D}$ l'application : $f \longmapsto f'$.

a- Montrer que $\mathcal{D}$ est un endomorphisme de E. Est-ce un automorphisme de E ?

b- Déterminer la matrice D de $\mathcal{D}$ lorsque E est rapporté à la base $\mathcal{B}$.

Comparer $D.L_\alpha$ et $L_\alpha.D$ et justifier le résultat.

c- Trouver quatre réels λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 tels que :

$$D^4 = \lambda_3 D^3 + \lambda_2 D^2 + \lambda_1 D + \lambda_0 I$$

où I désigne la matrice identité d'ordre 4.

d- Préciser les zéros sur $\mathbb{C}$ du polynôme : $X^4 - \lambda_3 X^3 - \lambda_2 X^2 - \lambda_1 X - \lambda_0$ où les λ_i sont les nombres déterminés en (3.c).

4) Montrer que les éléments de E sont des solutions de l'équation différentielle du 4ème ordre :

$$y^{(4)} + 5\, y'' + 4\, y = 0$$

5) Soit t un nombre réel donné. A toute fonction f de E on associe l'application $\psi_t(f)$:

.../...

$$\psi_t(f) \quad \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(t-x) \end{cases}$$

et l'on note ψ_t l'application : $f \longmapsto \psi_t(f)$ de E dans E.

a- Montrer que ψ_t est un endomorphisme de E.

b- Déterminer la matrice Φ_t de ψ_t dans la base $\mathcal{B}$. Est-elle inversible ?

6) On considère l'application : $\begin{cases} E^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) \longmapsto (f|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).g(x)\ dx \end{cases}$

a- Montrer que cette application est une forme bilinéaire sur E.

b- Calculer $(f|g)$ en fonction des coordonnées de f et de g dans la base $\mathcal{B}$.

c- En déduire que l'on obtient ainsi un produit scalaire. Donner une base orthonormée de E.

7) f et g étant deux éléments de E, on désigne par $f * g$ l'application :

$$f * g \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f * g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ g(x-t)\ dt \end{cases}$$

a- Exprimer $(f*g)(x)$ à l'aide du produit scalaire et de ψ_x. Montrer que $f*g \in E$.

Calculer les coordonnées de $f*g$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de f et de g dans cette base.

b- L'application : $(f,g) \longmapsto f*g$ de E^2 dans E est une loi de composition interne sur E. Etudier les propriétés de cette loi : associativité, commutativité, élément neutre, symétrisation, distributivité par rapport à l'addition.

c- Montrer qu'il existe un élément d de E tel que :

$$\forall f \in E \quad , d * f = f'$$

où $f' = \mathcal{D}(f)$, et calculer ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

8) Soit α un réel donné , et $\mathcal{L}_\alpha$ l'automorphisme défini au n°2) ; démontrer qu'il existe un endomorphisme unique de E, soit u_α^*, tel que :

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad (\mathcal{L}_\alpha(f) \mid g) = (f \mid u_\alpha^*(g))$$

Quel est cet endomorphisme ?

Que peut-on dire du produit scalaire $(\mathcal{L}_\alpha(f) \mid \mathcal{L}_\alpha(g))$?

9) f étant un élément de E donné, et h un réel donné, trouver les solutions appartenant à E de chacune des équations différentielles :

$y^{(4)} + 4y'' + 4y = f(x)$ et $y''' + hy = f(x)$

Application : $f(x) = \cos x$ pour la première, $f(x) = \cos x + \sin 2x$ pour la seconde.

10) Soit f_o, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto f_o(x) = 1$. On remplace $\mathcal{B}$ par la famille $\mathcal{B}' = (f_i)_{i \in \{0,1,2,3,4\}}$ et E par l'espace vectoriel E' engendré par $\mathcal{B}'$.

a- Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E'. Quelle est la dimension de E' ?

b- Préciser les modifications à apporter éventuellement aux questions 2 à 8 ?

°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail